Vol. XIX, Nº 2, Diciembre (2011)
Matemáticas: 15–32

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Homología de Morse en variedades compactas

Carlos Alberto Marín Arango
Universidad de Antioquia

Recibido Mar. 11, 2011 Aceptado Jul. 7, 2011

Abstract

Given a compact Riemannian manifold (M, g) and a Morse function $f : M \to \mathbb{R}$ whose gradient flow satisfies the Morse–Smale condition, (i.e. the stable and unstable manifolds of f intersect transversely) we construct a chain complex called the Morse–Witten Complex. Our goal on this paper is to show that the homology of the Morse–Witten complex is isomorphic to the singular homology of M.

Keywords: Morse homology, Morse-Smale condition, Morse- Witten complex.

MSC(2000): 53A15, 53B05, 53C10, 53C30

Resumen

Dada una variedad Riemanniana compacta (M, g) y una función de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ cuyo campo gradiente satisface la condición de Morse–Smale, (i.e. las variedades estable e inestable de f tienen intersección transversal) construimos un complejo de cadena llamado el complejo de Morse–Witten. Nuestro objetivo en este artículo es mostrar que la homología del complejo de Morse–Witten es isomorfa a la homología singular de M.

Palabras y frases claves: Homología de Morse, Condición de Morse–Smale, Complejo de Morse–Witten.

1 Introducción

Los fundamentos de la Teoría de Morse son originalmente introducidos por *Marston Morse* en el artículo [9]. La idea básica de esta teoría es encontrar invariantes topológicos para los puntos críticos de una función diferenciable y estimar técnicas para determinar el valor de tales invariantes. Una referencia clásica para el estudio de estos tópicos es [8], allí por medio del estudio de los subniveles cerrados

$$f^a = \{x \in M : f(x) \leq a\},$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y f es una función diferenciable definida en una variedad compacta finito dimensional M, se obtiene información sobre el tipo de homotopía de M, más específicamente, si $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable definida en una variedad diferenciable compacta, los subniveles f^a no cambian topológicamente cuando el número a varia en un intervalo $[b, c]$ el cual no contiene valores críticos; esto es mostrado deformando los subniveles cerrados por medio de las líneas de flujo del campo gradiente de f. Obviamente, la presencia de un valor crítico en el intervalo $[b, c]$ es una obstrucción para tal argumento, ya que en este caso algunas líneas de flujo del campo gradiente de la función f no realizan su trayectoria desde el nivel c hasta el nivel b. Si hay un único valor crítico $a \in]b, c[$, entonces f^c como espacio topológico se obtiene adjuntando al subnivel f^b una célula por cada punto crítico en $f^{-1}(a)$ de dimensión igual al índice del punto crítico. Dado que el pegado de células produce un efecto en la homología de un espacio topológico, la presencia y la cantidad de puntos críticos de un índice específico puede determinarse considerando los grupos de homología de M.

En los últimos 60 años la Teoría de Morse ha estado presente en diversos trabajos, en la decada del 50, Raoul Bott empleando métodos de la teoría de Morse estudió los grupos de homología y homotopía para los espacios simétricos compactos [1, 2], de este trabajo se obtiene la prueba del *Teorema de periodicidad de Bott*, además se introducen las funciones de Morse–Bott las cuales son una generalización de las funciones de Morse. Durante la decada de los 60, la Teoría de Morse es empleada para estudiar algunos aspectos topológicos en variedades, en particular en los trabajos de Stephen Smale los cuales le conducen a la solución de la conjetura de Poncaire para dimensiones mayores a 4. En los años 80, aparece un nuevo enfoque de la teoría de Morse debido a Edward Witten [17], la idea fundamental de este trabajo es asociar a una función de Morse $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ definida en una variedad Riemanniana compacta de dimensión finita n un complejo de cadena llamado *el complejo de Morse–Witten*, para el cual el k-ésimo $(k = 0, \dots n)$ grupo de cadena es el grupo abeliano libre generado por los puntos críticos de índice k de f y cuyo operador bordo realiza un conteo algebraico de las líneas de flujo asociadas con el campo gradiente. La homología del complejo de Morse–Witten es conocida como la *Homología de Morse*. A comienzos de la decada de los 90, Andreas Floer apoyado en las ideas de Witten introduce la *Homología de Floer* que es la versión infinito dimensional de la Homología de Morse [5]. Previo al trabajo de Witten, la idea de asociar un complejo a una función de Morse definida en una variedad Riemanniana (M, g) fue considerada por René Thom, quien encontró una descomposición celular para M asociada con f; luego Smale introduce una condición adicional en la métrica g, de modo que la descomposición celular resultante es un complejo celular.

El objetivo de este trabajo es mostrar que el complejo de Morse–Witten asociado con una función de Morse $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ es un complejo de cadena isomorfo al complejo de cadena singular de la variedad M. Este resultado aparece probado en [14]; el enfoque presentado en este trabajo es diferente y se realiza desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, a saber, via la intersección de las variedades estable e inestable asociadas con los puntos críticos de la función. La selección de este tópico para la elaboración de este artículo es motivada fundamentalmente en la elegancia y el caracter interdisciplinario de la teoría de Morse, la cual, además de ofrecer una colección considerable de teoremas, introduce conceptos y técnicas que se han tornado herramientas útiles para comprender y solucionar problemas matemáticos en diversas áreas.

2 Notación y preliminares

2.1 Puntos críticos y funciones de Morse

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un punto $p \in M$ es llamado un *punto crítico de* f si la aplicación lineal inducida $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ tiene rango nulo, en este caso el valor real $f(p)$ es llamado *valor crítico de* f. Denotamos por $\mathrm{Crit}(f)$ el conjunto formado por todos los puntos críticos de la función f. Si $a \in \mathbb{R}$, *el conjunto de los puntos críticos en el nivel* a es definido y denotado por:

$$\mathrm{Crit}_a = \mathrm{Crit}(f) \cap f^{-1}(a).$$

Obviamente, $\mathrm{Crit}(f)$ y Crit_a son subconjuntos cerrados de M y el conjunto de valores regulares de f es dado por $\mathbb{R} \setminus f\big(\mathrm{Crit}(f)\big)$.

Para cada $p \in \mathrm{Crit}(f)$, es posible definir una aplicación bilineal simétrica $\mathrm{d}^2f(p)$ en T_pM, llamada *la forma Hessiana de* f *en* p. Un punto crítico p es *no degenerado* si la forma Hessiana de f en p es no degenerada. El *índice de Morse* para el punto crítico $p \in M$ se define como siendo el índice de la forma Hessiana de f en p. i.e., la dimensión del mayor subespacio en el cual ésta es definida negativa. Decimos que f es una *función de Morse* cuando todos sus puntos críticos son no degenerados.

El Lema de Morse afirma que en coordenadas apropiadas entorno a un punto crítico no degenerado, la función f puede ser descrita por una forma cuadrática no degenerada. Más específicamente, si p es un punto crítico no degenerado de la función f, entonces existen coordenadas locales $(y_1, \cdots, y_n)$ en una vecindad U de p con $y_i(p) = 0$ para cada i de modo que la identidad:

$$f = f(p) - (y_1)^2 - \cdots - (y_k)^2 + (y_{k+1})^2 + \cdots + (y_n)^2 \tag{1}$$

se cumple en U, donde k denota el índice de Morse de p [8]. Como consecuencia de la identidad (1) se tiene que el índice de cualquier punto de máximo local (resp. mínimo local) es n. (resp. 0) Además, dado que el origen es el único punto crítico de una forma cuadrática no degenerada, se tiene que los puntos críticos no degenerados de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ son aislados en el conjutno $\mathrm{Crit}(f)$. En particular, si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función de Morse definida en una variedad diferenciable compacta, el conjunto $\mathrm{Crit}(f)$ es finito.

Es natural indagar sobre la existencia de funciones de Morse definidas en una variedad diferenciable arbitraria M. La respuesta a esta pregunta es afirmativa en el caso compacto. Además, en la actualidad es posible mostrar que dada una función diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$, existe una función de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ arbitráriamente cerca de g (respecto a la topología de convergencia uniforme) [3].

2.2 Orientación, transversalidad y número de intersección

Una *orientación* (en el sentido diferenciable) para una variedad diferenciable M es definida como una aplicación que asocia a cada punto $x \in M$ una orientación para el espacio tangente T_xM; la cual depende continuamente de x, tal continuidad puede establecerse en términos de la existencia de un atlas formado por cartas positivamente orientadas. En el caso de las variedades topológicas no se posee en general un espacio tangente en cada punto, por lo cual, la definición de orientación presentada para el caso de una variedad diferenciable no tiene sentido. Sin embargo, empleando teoría de homología es posible obtener una definición elegante para el concepto de orientación en una variedad, la cual incluye las variedades topológicas. En efecto, una *orientación homológica* para una variedad topológica n-dimensional M es una sección global del fibrado $\mathcal{O}(M)$ sobre M, en que

$$\mathcal{O}(M) = \bigcup_{x\in M} H_n(M, M \setminus \{x\}),$$

la cual asocia a cada punto $x \in M$ un generador del grupo cíclico infinito $H_n(M, M \setminus \{x\})$. Para el caso de una variedad diferenciable M, dado $x \in M$ es posible mostrar que existe una biyección canónica entre el conjunto de las orientaciones en el sentido homológico de M en el punto x (i.e., el conjunto de los generadores del grupo cíclico infinito $H_n\big(M, M \setminus \{x\}\big)$) y el conjunto de orientaciones en el sentido diferenciable en x (i.e., el conjunto de orientaciones para el espacio vectorial T_xM). Por una *orientación transversal* para una subvariedad $N \subset M$ es entendida una aplicación que asocia a cada punto $x \in N$ una orientación para el espacio vectorial T_xM/T_xN, la cual dependa continuamente de x. El siguiente resultado es adaptado de ideas encontradas en [15].

Teorema 1. *Si $N \subset M$ es una subvariedad cerrada tranversalmente orientada y codimensión n, existe un isomorfismo:*

$$H_n(M, M \setminus N) \xrightarrow{\varrho} H_0(N).$$

Además, si M' es una subvariedad de M transversal a N, y $N' = M' \cap N$, entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} H_n(M, M \setminus N) \arrow[r, "\varrho"] & H_0(N) \\ H_n(M', M' \setminus N') \arrow[u, "i_*"] \arrow[r, "\varrho"] & H_0(N') \arrow[u, "i_*"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

es conmutativo. En particular, si $N = \{a\}$ con $\dim M = n$, entonces el isomorfismo

$$\varrho : H_n(M, M \setminus \{a\}) \longrightarrow H_0(\{a\})$$

mapea el generador asociado con la orientación diferenciable en T_aM, sobre el generador canónico de $H_0(\{a\})$.

Al igual que para el concepto de orientación en variedades, la noción de *número de intersección* de una función con una suvariedad de su codominio puede ser formulada tanto en el lenguaje de la topología diferencial (la cual exige la diferenciabilidad de la función en cuestión) [13], como en el lenguaje topología algebraica (la cual sólo requiere la continuidad de la función). En el lenguaje de la topología algebraica el caso más simple corresponde a una función continua definida en un subconjunto abierto de la esfera S^n a valores en una variedad topológica n-dimensional orientada N. Denotamos por $\tau^{[n]}$ el generador del grupo $H_n\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)$ el cual es asociado a la orientación canónica de $\mathbb{R}^n$ y por $\alpha^{[n]}$[1] el generador del grupo $\tilde{H}_n(S^n)$ obtenido de $\tau^{[n]}$ via el isomorfismo ∂_* que aparece en la secuencia larga en homología del par $\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)$. Sean $U \subset S^n$ un conjunto abierto, $P \subset N$ una subvariedad cerrada transversalmente orientada y $f : U \to N$ una función continua tal que $f^{-1}(P)$ es un conjunto compacto; el *número de intersección* (en el sentido homológico) de la función f con la subvariedad P se define como el entero $\eta(f, P)$ para el cual se cumple la igualdad:

$$\phi\big(\alpha^{[n]}\big) = \eta(f, P).$$

donde $\phi : \tilde{H}_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ es el homomorfismo dado por la composición que aparece en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dddrr, "\phi"'] & H_n\big(S^n, S^n \setminus f^{-1}(N)\big) & H_n(U, U \setminus f^{-1}(N)) \arrow[l, "\simeq", "exc"'] \arrow[d, "f_*"] \\
& & H_n(M, M \setminus N) \arrow[d, "\varrho"] \\
& & H_0(N) \arrow[d, "\oplus"] \\
& & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

3 El complejo de Morse–Witten

Sean (M, g) una variedad Riemanniana compacta n-dimensional y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse. El objetivo es asociar un complejo de cadena a f, o más precisamente a $-\nabla f$, en que ∇f denota el campo gradiente de f respecto a g. Claramente la singularidades de $-\nabla f$ son precisamente los puntos críticos de f; además, por compacidad éste es un campo vectorial completo cuyo flujo induce una acción diferenciable:

$$(t, x) \longmapsto t \cdot x$$

del grupo aditivo $\mathbb{R}$ sobre M y para la cual cada línea de flujo converge a un punto crítico de f, i.e., dado un punto arbitrario $x \in M$ se tiene que $\lim_{t \to \pm\infty} t \cdot x$ existe

[1] la orientación diferenciable asociada a la orientación $\alpha^{[n]}$ of S^n es precisamente la orientación dada por el vector normal que apunta para fuera. [16].

y es un punto crítico de f. Para este sistema dinámico, las variedades *estable* e *inestable* asociadas al punto crítico $p \in M$ se definen respectivamente por:

$$\mathcal{W}_s(p) = \{x \in M : \lim_{t\to+\infty} t \cdot x = p\}$$

$$\mathcal{W}_u(p) = \{x \in M : \lim_{t\to-\infty} t \cdot x = p\}.$$

Tanto $\mathcal{W}_s(p)$ como $\mathcal{W}_u(p)$ son subvariedades embebidas de M, homeomorfas a los espacios $\mathbb{R}^{n-\mathrm{ind}_-(\mathrm{p})}, \mathbb{R}^{\mathrm{ind}_-(\mathrm{p})}$ respectívamente; donde $\mathrm{ind}_-(\mathrm{p})$ denota el índice de Morse del punto crítico p, [11]. Obviamente si x pertenece a la variedad estable (resp., inestable) de un punto critico p entonces $t \cdot x$ también pertenece a la variedad estable (resp., inestable) de p. En particular, para $x \in \mathcal{W}_s(p)$ se tiene:

$$-\nabla f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, t \cdot x\Big|_{t=0} \in T_x\mathcal{W}_s(p), \tag{3}$$

para todo $x \in \mathcal{W}_s(p)$, similarmente $-\nabla f(x) \in T_x\mathcal{W}_u(p)$, para todo $x \in \mathcal{W}_u(p)$.

Dados puntos $p, q \in \mathrm{Crit}(f)$ tales que las variedades $\mathcal{W}_u(p)$, $\mathcal{W}_s(q)$ son transversales y no dijuntas, como consecuencia de la transversalidad se tiene que $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)$ es una subvariedad embebida de M, cuya dimensión es calculada como sigue:

$$\begin{aligned} \dim\big(\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)\big) &= \dim\big(\mathcal{W}_u(p)\big) + \dim\big(\mathcal{W}_s(q)\big) - \dim(M) \\ &= \mathrm{ind}_-(\mathrm{p}) + \mathrm{dim(M)} - \mathrm{ind}_-(\mathrm{q}) - \mathrm{dim(M)} \\ &= \mathrm{ind}_-(p) - \mathrm{ind}_-(q). \end{aligned}$$

Además, cuando $p \neq q$, para cada $x \in \mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)$ se tiene:

$$T_x\big(\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)\big) = T_x\mathcal{W}_u(p) \cap T_x\mathcal{W}_s(q),$$

en particular, $\mathrm{ind}_-(\mathrm{p}) > \mathrm{ind}_-(\mathrm{q})$ y $-\nabla f(x) \in T_x\big(\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)\big)$.

El concepto de transversalidad entre las variedades estable e inestable es introducido en teoría por Smale, quien descubrió que este requisito para la intersección de estas variedades se mantiene válido para una métrica generica en M. Por esta razón, tal condición es conocida como la condición de Morse-Smale; más específicamente:

Definición 1. *Dado un número entero k, la función $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ satisface la* condición de Morse–Smale de orden *k si para cada par de puntos críticos $p, q \in M$ con* $\mathrm{ind}_-(\mathrm{p}) - \mathrm{ind}_-(\mathrm{q}) \leq \mathrm{k}$, *la variedad inestable de p y la variedad estable de q son transversales. Si $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ satisface la condición de Morse–Smale para cada $k \in \mathbb{Z}$ simplemente se dice que f satisface la* condición de Morse–Smale.

La condición de transversalidad de Morse–Smale, permite definir una relación de orden en los índices de los puntos del conjunto $\mathrm{Crit}(f)$ determinada por la existencia de una línea de flujo entre dos puntos críticos, de forma que el índice de Morse decrece a lo largo de las líneas de flujo de $-\nabla f$. Además, si $\text{ind}_{\text{-}}(\text{p}) - \text{ind}_{\text{-}}(\text{q}) = 1$ y las variedades $\mathcal{W}_u(p), \mathcal{W}_s(q)$ son no disjuntas, entonces la variedad $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)$ tiene dimensión 1 y consiste de una colección de líneas de flujo para $-\nabla f$ uniendo el punto crítico p con el punto crítico q. Es posible mostrar que dicha colección de líneas de flujo es finita. A saber, si asumimos que la función de Morse $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ satisface la condición de Morse–Smale de orden 1, empleando la compacidad se puede obtener la clausura del conjunto $\mathcal{W}_s(p)$ adicionando algunas *líneas de flujo por pasos* para el campo $-\nabla f$, i.e., líneas de flujo que pasan por otros puntos críticos antes de alcanzar su punto final. Más específicamente, en [16] es probado el siguiente resultado: Sea $p \in \text{Crit}(f)$. Si $x \in \overline{\mathcal{W}_s(p)}$ entonces existe una k-línea de flujo por pasos desde el punto $-\infty \cdot x$ hasta el punto p. Donde por una k-línea por pasos entendemos una sucesión $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_k)$ de líneas de flujo $\gamma_i : \mathbb{R} \to M$ para $-\nabla f$, tales que $\lim_{t\to+\infty} \gamma_i(t) = \lim_{t\to-\infty} \gamma_{i+1}(t)$ para cada $i = 1, ..., k-1$.

Lema 1. *Dados $p, q \in \text{Crit}(f)$ con $\text{ind}_{\text{-}}(\text{p}) - \text{ind}_{\text{-}}(\text{q}) = 1$, el número de líneas de flujo desde p hasta q es finito.*

Demostración. Sea $a < f(p)$ un número real tal que no hay valores críticos de f en el intervalo $[a, f(p)[$, cada línea de flujo no constante de $-\nabla f$ contenida en $\mathcal{W}_u(p)$ intersecta el nivel $f^{-1}(a)$ (precisamente en un punto), o sea, existe una bijección entre el conjunto de las líneas de flujo de $-\nabla f$ desde p hasta q y la subvariedad cero dimensional $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q) \cap f^{-1}(a)$. Veamos que $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q) \cap f^{-1}(a)$ es un conjunto finito. $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q) \cap f^{-1}(a)$ es un conjunto discreto, para obtener el resultado deseado es necesario mostrar que es un conjunto cerrado. Para esto, sea x un punto en su clausura, como $\mathcal{W}_u(p) \cap f^{-1}(a)$ es compacto (homeomorfo a la esfera), se tiene que $x \in \overline{\mathcal{W}_s(q)} \cap \mathcal{W}_u(p) \cap f^{-1}(a)$. Por lo tanto, existe una k-línea por pasos desde $q_1 = \lim_{t\to-\infty} t \cdot x \in \text{Crit}(f)$ hasta q, luego existe una $k+1$-línea por pasos desde p hasta q. Como $1 = \text{ind}_{\text{-}}(p) - \text{ind}_{\text{-}}(q) \geq k+1$, necesariamente $k = 0$ lo que implica $q_1 = q$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de presentar el *Complejo de Morse–Witten* asociado al campo $-\nabla f$. Antes de proceder, para cada par de puntos $p, q \in \text{Crit}(f)$ es necesario escoger de forma apropiada una orientación en $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)$. En efecto, dado $p \in \text{Crit}(f)$ escogemos una orientación para el espacio vectorial $T_p\mathcal{W}_u(p)$, esta selección induce una orientación en la variedad inestable $\mathcal{W}_u(p)$; además una orientación transversal en la variedad estable $\mathcal{W}_s(p)$. Por lo tanto, dados $p, q \in \text{Crit}(f)$ con $\text{ind}_{\text{-}}(\text{p}) - \text{ind}_{\text{-}}(\text{q}) = 1$. En cualquier punto sobre una línea de flujo desde p hasta q se tiene un isomorfismo canónico:

$$T\mathcal{W}_u(p) \to T\big(\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)\big) \oplus \big(TM/T\mathcal{W}_s(q)\big) \tag{4}$$

La orientación en $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)$ es escogida de forma tal que el isomorfismo (4) sea orientado positivo.

Definición 2. *(El complejo de Morse–Witten) Para $k \geq 0$, se define el grupo de cadena $\mathcal{C}_k(f)$ como siendo el grupo libre abeliano generado por el conjunto de puntos críticos de f con índice de Morse k; y el operado bordo $\partial_k : \mathcal{C}_k(f) \to \mathcal{C}_{k-1}(f)$ se define por:*

$$\partial_k(p) = \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} n(p,q)q. \tag{5}$$

Donde el coeficiente para $q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)$ en la expresión para el bordo de p, es dado por un conteo algebraico del número de líneas de flujo contenidas en $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)$. El signo de cada línea de flujo es determinado comparando la orientación natural inducida por el campo vectorial $-\nabla f$ con la orientación inducida por (4). La Homología de Morse *para M se define como siendo la homología del complejo $(\mathcal{C}(f)_*; \partial)$.*

El proposito de este trabajo es demosrar que el complejo de Morse–Witten es un complejo de cadena cuyos grupos de homología son isomorfos a los grupos de homología singular de M.

Observación 1. *Dados $p, q \in \mathrm{Crit}(f)$ con $n_-(p) - n_-(q) = 1$, $a \in \mathbb{R}$ de modo que no hay valores críticos para f en el intervalo $\big(f(q), f(p)\big)$, el coeficiente para q en la expresión para el bordo del punto p, que aparece en (5), coincide con el número de intersección de las esferas $f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p)$, $f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_s(q)$ en $f^{-1}(a)$. En efecto, el número de intersección de tales esferas es dado por el conteo algebraico de los puntos en el conjunto finito $\mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q) \cap f^{-1}(a)$, en que el signo de un punto x es positivo, si el isomorfismo:*

$$T_x\big(\mathcal{W}_u(p) \cap f^{-1}(a)\big) \xrightarrow{\pi \mathrm{d}i(x)} \frac{T_x\big(f^{-1}(a)\big)}{T_x\big(\mathcal{W}_s(q) \cap f^{-1}(a)\big)}$$

es positivo; caso contrario, es negativo. Por otro lado, la aplicación $T_x\big(f^{-1}(a)\big) \xrightarrow{\pi} T_xM/T_x\big(\mathcal{W}_s(q)\big)$ induce un isomorfismo:

$$\frac{T_x\big(f^{-1}(a)\big)}{T_x\big(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_s(q)\big)} \xrightarrow{\simeq} \frac{T_xM}{T_x\big(\mathcal{W}_s(q)\big)}. \tag{6}$$

Como el espacio vectorial $T_xM/T_x\big(\mathcal{W}_s(q)\big)$ es orientado, empleando el isomorfismo (6) es posible determinar cuando una base para $T_x(f^{-1}(a))/T_x\big(\mathcal{W}_s(q)\big)$ es positiva o negativa. A saber, si $(b_1, \ldots, b_{k-1})$ es una base para el espacio $T_x\big(\mathcal{W}_u(p) \cap f^{-1}(a)\big)$ tal que $(-\nabla f(x), b_1, \ldots, b_{k-1})$ sea una base positiva de $T_x\big(\mathcal{W}_u(p)\big)$. Luego la línea de flujo σ pasando por el punto $x \in \mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)$, tiene signo positivo si, y solamente si, $[b_1], \ldots, [b_{k-1}]$ es una base positiva de $T_xM/T_x\big(\mathcal{W}_s(q)\big)$. Por otro lado, si $(b_1, \ldots, b_{k-1})$ es una base positiva para $T_x\big(\mathcal{W}_u(p) \cap f^{-1}(a)\big)$, entonces un punto $x \in \mathcal{W}_u(p) \cap \mathcal{W}_s(q)$ tiene signo positivo si, y solamente si, $[b_1], \ldots, [b_{k-1}]$ es una base positiva para el espacio $T_x(f^{-1}(a))/T_x\big(\mathcal{W}_s(q) \cap f^{-1}(a)\big)$ si, y solamente si, $[b_1], \ldots, [b_{k-1}]$ es una base positiva para el espacio $T_xM/T_x\big(\mathcal{W}_s(q)\big)$.

Las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ cuyos valores críticos están ordenados de acuerdo a los índices de los correspondientes puntos críticos, i.e., $f(p) = f(q)$ siempre que los respectivos índices $\mathrm{ind}_-(p)$, $\mathrm{ind}_-(q)$ sean iguales, y $f(p) > f(q)$ cuando $\mathrm{ind}_-(p) > \mathrm{ind}_-(q)$ son llamadas *funciones de Smale.* A diferencia de las funciones de Morse, el conjunto de las funciones de Smale no necesariamente es un conjunto denso en el espacio de las funciones continuas $M \to \mathbb{R}$, [4]. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado adaptado de ideas encontradas en [7].

Teorema 2. *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse satisfaciendo la condición de Morse-Smale de orden cero. Entonces existen una función de Morse $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ y una métrica Riemanniana $\tilde{g}$ en M tales que el gradiente de f respecto a g coincide con el gradiente de $\tilde{f}$ respecto a $\tilde{g}$.*

Actualmente es posible mostrar que la función $\tilde{f}$ del teorema anterior es *auto–indexante*, i.e., satisface la condición adicional $\tilde{f}(p) = \mathrm{ind}_-(p)$ para cada punto crítico p. Dado que el complejo de Morse–Witten asociado a la función $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ depende exclusivamente del campo gradiente ∇f, con la notación del Teorema anterior, el complejo de Morse–Witten asociado con la función $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ coincide con el complejo de Morse–Witten asociado a la función $\tilde{f} : (M, \tilde{g}) \to \mathbb{R}$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad con el fin de estudiar la homología de Morse en la variedad M, es posible asumir que $f : M \to \mathbb{R}$ es una función de Morse auto–indexante que satisface la condición de Morse-Smale de orden 1.

Sea $k > 0$, bajo la suposiciones anteriores, el subnivel f^{k-1} es un retrato por deformación (fuerte) del conjunto $f^k \setminus \mathrm{Crit}_k$. Por lo tanto, se tiene un isomorfismo en homología

$$H\big(f^k, f^{k-1}\big) \cong H\big(f^k, f^k \setminus \mathrm{Crit}_k\big). \tag{7}$$

inducido por inclusión. Si $\mathrm{Crit}_k = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ y escogemos conjuntos abiertos disjuntos $(U_i)_{i=1}^s$ en M tales que $p_i \in U_i$, $i = 1, \dots, r$. Sean $U = \cup_{i=1}^s U_i$ y $U^* = \cup_{i=1}^s U_i \setminus \{p_i\}$. Dado que Crit_k es un subconjunto cerrado del abierto relativo $U \cap f^k$ de f^k, como consecuencia del principio de escisión, obtenemos el siguiente isomorfismo en homología inducido por inclusión

$$H\big(f^k \cap U, f^k \cap U^*\big) \cong H\big(f^k, f^k \setminus \mathrm{Crit}_k\big). \tag{8}$$

Además,

$$\begin{aligned} H\big(f^k \cap U, f^k \cap U^*\big) &\cong \bigoplus_{i=1}^s H\big(f^k \cap U_i, (f^k \cap U_i) \setminus \{p_i\}\big) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^s H\big(f^k, f^k \setminus \{p_i\}\big). \end{aligned} \tag{9}$$

Como consecuencia de los isomorfismos (7), (8), (9) se obtiene un isomorfismo

$$H\big(f^k, f^{k-1}\big) \cong \bigoplus_{i=1}^s H\big(f^k, f^k \setminus \{p_i\}\big). \tag{10}$$

El Lema de Morse garantiza la existencia de un conjunto abierto entorno de cada punto $p_i \in \mathrm{Crit}_k$ en f^k el cual es homeomorfo a una vecindad del origen en el cono:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : \|x\| \geq \|y\|\},$$

por medio de un homeomorfismo que mapea el punto p_i sobre el origen. Luego

$$H(f^k, f^k \setminus \{p_i\}) \cong H(C, C \setminus \{0\}) \cong H(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}), \tag{11}$$

Por lo tanto, para cada $p \in \mathrm{Crit}_k$

$$H_i(f^k, f^k \setminus \{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Sigue de (10) que

$$H_i(f^k, f^{k-1}) \cong \begin{cases} \oplus_{|\mathrm{Crit}_k|}\mathbb{Z}, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Como consecuencia se tiene que los subniveles cerrados $(f^k)_{k\geq 0}$ asociados a la función f forman un buena filtración para la variedad M. Por lo tanto, la homología del complejo de cadena asociado con esta filtración es isomorfa con la homología singular de M (ver [10]).

Observación 2. *Como consecuencia del isomorfismo* (11)*, se tiene*

$$H(\mathcal{W}_u(p_i), \mathcal{W}_u(p_i) \setminus \{p_i\}) \cong H(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \cong H(f^k, f^k \setminus \{p_i\}). \tag{12}$$

4 Teorema fundamental

Dedicamos esta sección a mostrar el resultado principal de este trabajo, a saber:

Teorema 3. *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse auto–indexante, definida en una variedad Riemanniana compacta (M, g) satisfaciendo la condición de Morse–Smale de orden* 1*. Entonces el complejo de Morse–Witten $(\mathcal{C}_k(f), \partial_k)_{k\in Z}$ es un complejo de cadena, el cual es isomorfo al complejo de cadena singular de M.*

Como consecuencia de lo observado en la sección anterior, para obtener el resultado deseado, es suficiente probar que el complejo de cadena asociado con la filtración $(f^k)_{k\geq 0}$ de f, es isomorfo al complejo de Morse–Witten de f. Para esto, consideremos fija una función $f : M \to \mathbb{R}$ como en el enunciado del Teorema 3. Para cada $k \geq 0$ construiremos un isomorfismo: $\rho : \mathcal{C}_k(f) \to H_k(f^k, f^{k-1})$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_k(f) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\partial_k"'] & H_k(f^k, f^{k-1}) \arrow[d, "\partial_*"] \\ \mathcal{C}_{k-1}(f) \arrow[r, "\rho"'] & H_{k-1}(f^k, f^{k-1}) \end{tikzcd} \tag{13}$$

sea conmutativo.

Sea $k \geq 0$ un número entero, empleando los isomorfismos (10) y (12) se define un isomorfismo:

$$\bigoplus_{p_i \in \mathrm{Crit}_k} H_k\left(\mathcal{W}_u(p_i), \mathcal{W}_u(p_i)^*\right) \cong H_k(f^k, f^{k-1})$$

requiriendo la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{p_i \in \mathrm{Crit}_k} H_k\big(\mathcal{W}_u(p_i), \mathcal{W}_u(p_i)^*\big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \bigoplus_{p_i \in \mathrm{Crit}_k} H_k\big(f^k, f^k \setminus \{p_i\}\big) \\
& H_k(f^k, f^{k-1}) \arrow[u, "\cong\ (10)"']
\end{tikzcd} \tag{14}$$

donde empleamos la notación $\mathcal{W}_u(p)^* = \mathcal{W}_u(p) \setminus \{p\}$.

Dado $p \in \mathrm{Crit}(f)$, escogiendo una orientación para el espacio vectorial $T_p\mathcal{W}_u(p)$, se obtiene un generador $\mathcal{O}_p$ para el grupo cíclico infinito $H_k\big(\mathcal{W}_u(p), \mathcal{W}_u(p)^*\big)$; y por lo tanto un isomorfismo:

$$\mathcal{C}_k(f) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{p_i \in \mathrm{Crit}_k} H_k\big(\mathcal{W}_u(p_i), \mathcal{W}_u(p_i)^*\big). \tag{15}$$

Definimos ρ como siendo el isomorfismo obtenido por la composición del isomorfismo (15) con el isomorfismo φ que aparece en el diagrama (14). Con la notación y terminología anterior, la conmutatividad del diagrama (13) se obtiene si para cada $p \in \mathrm{Crit}_k$, cada $q \in \mathrm{Crit}_{k-1}$ vale la igualdad:

$$\hat{q}\big(\partial_k(p)\big) = \hat{q}\big(\rho^{-1} \circ \partial_* \circ \rho(p)\big)$$

donde $\hat{q} : \mathcal{C}_{k-1}(f) \to \mathbb{Z}$ es la aplicación que da el coeficiente en q.

Para cada $q \in \mathrm{Crit}_{k-1}$, como consecuencia de la definición de ρ y de la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{q_i \in \mathrm{Crit}_{k-1}} H_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(q_i), \mathcal{W}_u(q_i)^*\big) \arrow[r, "\cong"] & \bigoplus_{q_i \in \mathrm{Crit}_{k-1}} H_{k-1}(f^{k-1}, f^{k-1} \setminus \{q_i\}) \\
H_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(q), \mathcal{W}_u(q)^*\big) \arrow[u, "i_*"] \arrow[r, "\cong"'] & H_{k-1}(f^{k-1}, f^{k-1} \setminus \{q\}) \arrow[u, "i_*"']
\end{tikzcd}$$

se tiene que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}(f^{k-1},f^{k-2}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & H_{k-1}\big(f^{k-1},f^{k-1}\setminus\{q\}\big) \\
\mathcal{C}_{k-1}(f) \arrow[d, "\hat{q}"'] & H_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(q),\mathcal{W}_u(q)^*\big) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "Id"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd} \tag{16}$$

es conmutativo, donde el isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y $H_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(q),\mathcal{W}_u(q)^*\big)$ es asociado a la orientación escogida en $\mathcal{W}_u(q)$, i.e., mapea $\mathcal{O}_q$ en 1.

Observación 3.

1. *Para $p \in \mathrm{Crit}_k$, sigue de la definición de ρ, que el homeomorfismo f_1 definido por la composición:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[ddrr, "f_1"'] & H_k\big(\mathcal{W}_u(p),\mathcal{W}_u(p)^*\big) \arrow[r, "i_*"] & \bigoplus_{p_i\in\mathrm{Crit}_k} H_k\big(\mathcal{W}_u(p_i),\mathcal{W}_u(p_i)^*\big) \arrow[d, "\varphi"] \\
 & & H_k(f^k,f^{k-1}) \arrow[d, "\partial_*"] \\
 & & H_{k-1}(f^{k-1},f^{k-2})
\end{tikzcd}$$

   mapea 1 *sobre* $\partial*\big(\rho(p)\big)$.

2. *Para $q \in \mathrm{Crit}_{k-1}$, el homeomorfismo f_3 definido por la composición:*

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}(f^{k-1},f^{k-2}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[ddr, "f_3"'] & H_{k-1}\big(f^{k-1},f^{k-1}\setminus\{q\}\big) \arrow[d, "\simeq"] \\
 & H_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(q),\mathcal{W}_u(q)^*\big) \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

   coincide con $\hat{q}\circ\rho^{-1}$. Ver diagrama (16). *Luego la composición $f_3\circ f_1$ mapea* 1 *sobre $\hat{q}\big(\rho^{-1}\partial_*\rho(p)\big)$.*

Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $k-1 < a < k$, para cada $p \in \mathrm{Crit}_k$, cada $q \in \mathrm{Crit}_{k-1}$, considere el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[rr, "Id"] \arrow[dd, "f_1"'] & & \mathbb{Z} \arrow[d, "\simeq"] \\
& & \tilde{H}_{k-1}\left(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p)\right) \arrow[d, "i_*"] \\
H_{k-1}(f^{k-1}, f^{k-2}) \arrow[dd, "f_3"'] & & H_{k-1}\left(f^{-1}(a), f^{-1}(a) \setminus \mathcal{W}_s(q)\right) \arrow[d, "\varrho"] \\
& & H_0\left(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_s(q)\right) \arrow[d, "\oplus"] \\
\mathbb{Z} \arrow[rr, "Id"'] & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\tag{17}
$$

donde el isomorfismo $\mathbb{Z} \simeq \tilde{H}_{k-1}(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p))$ es asociado a la orientación en la esfera $f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p)$ determinada por $\mathcal{O}_p$. i.e., mapea 1 en $\alpha^{[k-1]}$. La columna izquierda del diagrama (17) mapea 1 sobre $\hat{q}\big(\rho^{-1}\partial_*\rho(p)\big)$ y la columna de la derecha mapea 1 en el número de intersección de las esferas $f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p)$ y $f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_s(q)$ en la subvariedad $f^{-1}(a)$, el cual es el enetero $\hat{q}\left(\partial_*(p)\right)$. Por lo tanto, para obtener la conmutatividad del diagrama (13), basta mostrar la conmutatividad del diagrama (17).

Para establecer la conmutatividad del diagrama (17), construiremos un diagrama conmutativo equivalente a éste. Para este fin procedemos como sigue: fijemos números reales a, b tales que $k-1 < a < b < k$ y puntos críticos $p \in \mathrm{Crit}_k$, $q \in \mathrm{Crit}_{k-1}$. Como consecuencia del Teorema 1, se tiene un isomorfismo:

$$H_{k-1}\big(f^b, f^b \setminus \mathcal{W}_s(q)\big) \xrightarrow{\varrho} H_0\big(f^b, f^b \setminus \mathcal{W}_s(q)\big).$$

además, una diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
H_{k-1}\big(f^b, f^b \setminus \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[r, "\varrho"] & H_0\left(f^b \cap \mathcal{W}_s(q)\right) \\
H_{k-1}\left(f^1(a), f^{-1}(a) \setminus \mathcal{W}_s(q)\right) \arrow[u, "i_*"] \arrow[r, "\varrho"'] & H_0\big(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[u, "i_*"']
\end{tikzcd}
$$

Denotamos por f_2, f_4, f_5 los homeomorfismos definidos a seguir:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[rr, bend right, "f_2"'] & \tilde{H}_{k-1}\big(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p)\big) \arrow[r, "i_*"] & H_{k-1}\big(f^b, f^b \setminus \mathcal{W}_s(q)\big)
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}\big(f^b, f^b \setminus \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[r, "\varrho"] \arrow[rr, bend right, "f_4"'] & H_0\big(f^b \setminus \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}\big(f^{-1}(a), f^{-1}(a)_*\big) \arrow[r, "\varrho"] \arrow[rr, bend right, "f_5"'] & H_0\big(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[r, "\oplus"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Donde empleamos la notación $f^{-1}(a)_* = f^{-1}(a) \setminus \mathcal{W}_s(q)$, además el isomorfismo $\mathbb{Z} \simeq \tilde{H}_{k-1}(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p))$ es asociado con la orientación en la esfera $f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p)$ determinada por $\mathcal{O}_p$ y el isomorfismo ϱ tiene signo definido por la orientación transversal en $\mathcal{W}_s(q)$.

Con la notación y terminología anterior, la conmutatividad del diagrama (17) se establace a partir de la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "f_2"] & \\
H_{k-1}(f^{k-1}, f^{k-2}) \arrow[dr, "i_*"] \arrow[ddr, "f_3"'] & & \tilde{H}_{k-1}\big(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p)\big) \arrow[dl, "i_*"'] \arrow[d, "i_*"] \\
 & H_{k-1}\big(f^b, f^b \setminus \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[d, "f_4"] & H_{k-1}\big(f^{-1}(a), f^{-1}(a)_*\big) \arrow[l, "i_*"'] \arrow[dl, "f_5"] \\
 & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd} \tag{18}$$

Es claro que la conmutatividad del cuadrado en la parte superior derecha es una consecuencia inmediata de la funtorialidad de la homología singular. Por lo tanto, resta mostrar la conmutatividad de los triángulos que aparecen en el diagrama.

Observación 4.

Dado $p \in \mathrm{Crit}_k$, como $\mathcal{W}_u(p)$ es un espacio contráctil, la secuencia larga en homología del par $\big(\mathcal{W}_u(p), \mathcal{W}_u(p)^*\big)$ induce un isomorfismo en homología:

$$H_k\big(\mathcal{W}_u(p), \mathcal{W}_u(p)^*\big) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(p)^*\big),$$

además la esfera $\mathcal{W}_u(p) \cap f^{-1}(a)$ es un retrato por deformación del espacio $\mathcal{W}_u(p)^*$, luego la aplicación inclusión induce un isomorfismo en homología:

$$\widetilde{H}_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(p) \cap f^{-1}(a)\big) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(p)^*\big).$$

Finalmente, el homeomorfismo en homología $H_k\big(f^b\big) \xrightarrow{i_*} H_k(f^k \setminus \mathrm{Crit}_k)$ inducido por inclusión es un isomorfismo.

Lema 2. *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
H_{k-1}\big(f^{k-1}, f^{k-2}\big) \arrow[rr, "i_*"'] & & H_{k-1}\big(f^b, f^b \setminus \mathcal{W}_s(q)\big)
\end{tikzcd}
$$

Demostración. El diagrama es equivalente con el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[rr, "Id"] \arrow[d, "\simeq"'] & & \mathbb{Z} \arrow[d, "\simeq"] \\
H_k\big(\mathcal{W}_u(p), \mathcal{W}_u(p)^*\big) \arrow[r, "\partial_*", "\simeq"'] \arrow[d, "i_*"'] & \tilde{H}_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(p)^*\big) \arrow[d, "i_*"] & \tilde{H}_{k-1}\big(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_u(p)\big) \arrow[l, "i_*"', "\simeq"] \arrow[d, "i_*"] \\
H_k(f^k, f^k_*) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{k-1}(f^k_*, f^b_*) & H_{k-1}\big(f^b, f^b_*\big) \arrow[l, "\simeq"', "i_*"] \\
 & H_k\big(f^k, f^b\big) \arrow[ul, "\simeq"', "i_*"] \arrow[ur, "\partial_*"'] & \\
 & & H_{k-1}(f^{k-1}, f^{k-2}) \arrow[uu, "i_*"'] \\
 & H_k(f^k, f^{k-1}) \arrow[uu, "\simeq", "i_*"'] \arrow[uuul, "i_*"', "\simeq"] \arrow[ur, "\partial_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

Lema 3. *Con la notación y la terminología anterior. El diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
H_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(q), \mathcal{W}_u(q)^*\big) \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & H_{k-1}\big(f^b, f^b_*\big) \arrow[dl, "f_4"] \\
 & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo. Además el isomorfismo $H_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(q), \mathcal{W}_u(q)^*\big) \simeq \mathbb{Z}$ es asocido a la orientación transversal en $\mathcal{W}_u(q)$.

Demostración. Como $n_-(q) = k - 1$, el conjunto $\mathcal{W}_u(q)$ siendo homeomorfo a $\mathbb{R}^{k-1}$ puede ser identificado con algún conjunto abierto de la esfera S^{k-1}. Además,

$\mathcal{W}_s(q) \cap f^b$ tiene codimensión $k-1$ en f^b. Luego el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_{k-1}(S^{k-1}) \arrow[r, "i_*", "\simeq"'] \arrow[ddddrr, "\phi"'] & H_{k-1}(S^{k-1}, S^{k-1} \setminus \{q\}) & H_{k-1}(\mathcal{W}_u(q), \mathcal{W}_u(q)^*) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[d, "i_*"] \\
 & & H_{k-1}\big(f^b, f^b_*\big) \arrow[d, "\varrho"] \\
 & & H_0\big(f^b \cap \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[d, "\simeq"] \\
 & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

calcula el número de intersección de la aplicación inclusión $S^{k-1} \supset \mathcal{W}_u(q) \longrightarrow f^b$ con $\mathcal{W}_s(q) \cap f^b$. Es claro que este número es 1, o sea, que la función compuesta $f_4 \circ i_*$ lleva $\mathcal{O}_q$ en 1. $\square$

Lema 4. *Con la notación y la terminología anterior. El diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}\big(f^{k-1}, f^{k-2}\big) \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "f_3"'] & & H_{k-1}\big(f^b, f^b_*\big) \arrow[dl, "f_4"] \\
 & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

es commutativo.

Demostración. El diagrama es equivalente con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}(f^{k-1}, f^{k-2}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "i_*"'] & H_{k-1}\big(f^b, f^b_*\big) \arrow[dd, "\varrho"] \\
H_{k-1}(f^{k-1}, f^{k-1} \setminus \{q\}) & \\
H_{k-1}\big(\mathcal{W}_u(q), \mathcal{W}_u(q)^*\big) \arrow[u, "i_*", "\simeq"'] \arrow[uur, "i_*"'] \arrow[d, "\simeq"'] & H_0\big(f^b \cap \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "Id"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

cuya conmutatividad es garantizada por el Lema 3 y la funtorialidad de la homología singular. $\square$

Lema 5. *El siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} H_{k-1}\big(f^b, f^b_*\big) \arrow[dr, "f_4"'] & & H_{k-1}\big(f^{-1}(a), f^{-1}(a)_*\big) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "f_5"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. El diagrama es conmutativo pues es equivalente al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{k-1}\left(f^b, f^b_*\right) \arrow[d, "\varrho"'] & H_{k-1}\big(f^{-1}(a), f^{-1}(a) \setminus \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[l, "i_*"'] \arrow[d, "\varrho"] \\ H_0\big(f^b \cap \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[d, "\simeq"] & H_0\big(f^{-1}(a) \cap \mathcal{W}_s(q)\big) \arrow[l, "i_*"'] \arrow[d, "\oplus"] \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l, "Id"] \end{tikzcd}$$

□

Referencias

[1] Bott R.: An aplication of the Morse Theory to the topology of Lie Groups. Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 251–281.

[2] Bott R., Samelson H.: An aplication of the Theory of Morse to Symmetric Spaces. Amer. J. Math. 80 (1958), 964–1029.

[3] Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P.: Modern Geometry - Methods and Applications. Vol II, Springer-Verlag, (1985).

[4] Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P.: Modern Geometry - Methods and Applications. Vol III, Springer-Verlag, (1985).

[5] Floer A.: Witten's Complex and Infinite Dimensional Morse Theory. J. Diff. Geom 30 (1989), 207–221.

[6] Mawhin J., Willem M.: Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer-Verlag, (1989).

[7] Milnor J.: Lectures on the h-Cobordism Theorem. Princeton University Press (1965).

[8] Milnor J.: Morse Theory. Princeton University Press (1973).

[9] Morse M.: The foundations of a theory of the calculus of variations in the large m–space. Trans. Am. Math. Soc., (1929).

[10] Munkres J. R.: Elements of Algebraic Topolgy. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., (1984).

[11] Palis Jr. J.: Introdução Aos Sistemas Dinâmicos. IMPA (1975).

[12] Palais R. S., Terng Chuu-lian.: Critical Point Theory and Submanifolds Geometry, Lecture Notes in Mathematics n. 1353, Springer-Verlag, (1988).

[13] Pollack A., Guillemin V.: Diferential Topology. Pretince-Hall, (1974).

[14] Schwarz M.: Morse Homology. Progress in Math. 111, Birkhäuser, (1993).

[15] Spanier E.:t Algebraic Topology. McGraw-Hill, New York (1966).

[16] Tausk D.V., Mercuri F., Piccione P.: Notes on Morse Theory. 23° Colóquio Brasileiro De Matemática, IMPA (2001).

[17] Witten E.: Supersymmetry and Morse Theory. J. Diff. Geom 17 (1982), 661–692.

Dirección del autor
Carlos Alberto Marín Arango — Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín - Colombia
e-mail: `camara@matematicas.udea.edu.co`